

СИМПЛИЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СТРУКТУРНОЙ СЛОЖНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ**В.В. Поповский, А.В. Лемешко, О.Ю. Евсеева**

Предложен подход к оценке структурной сложности телекоммуникационных систем, основанный на использовании возможностей математического аппарата q -анализа. Структура системы в зависимости от степени связности ее элементов описывалась одномерными, многомерными симплексами и симплициальными комплексами

1. Введение

Все чаще при решении общетеоретических и научно-прикладных задач анализа и синтеза телекоммуникационных систем (ТКС) возникает необходимость в реализации возможностей методологии системных исследований, что, в свою очередь, связано с трактовкой ТКС как сложной организационно-технической системы [1, 2]. Стоит отметить, что сложность – понятие многогранное, и в зависимости от целей исследования приходится сталкиваться с различными аспектами ее проявления. В связи с тем, что именно структура является системообразующим каркасом и носителем целостных (интегральных) свойств системы, особое место в различных интерпретациях сложности отводится понятию структурной сложности, а также способам ее качественной и количественной оценки. Естественнo предположить, что решение задач по оценке структурной сложности системы должно сопровождаться адекватным математическим описанием сложности как объекта исследований с указанием его основных компонент и мер, а также с демонстрацией на наглядных примерах оценки сложности при решении конкретных проблем прикладного системного анализа.

2. Основные подходы к оценке структурной сложности ТКС

К числу основных факторов сложности стоит отнести размерность системы, определяемой количеством ее основных элементов (подсистем) и характером взаимосвязи между ними. Факторы структурной сложности системы во многом пересекаются со слагаемыми связности системы, что позволяет перевести задачу оценки структурной сложности в плоскость исследования связности элементов системы. Математическое описание связности может быть осуществлено с помощью различных подходов, причем наиболее удачными основаны на использовании теории графов и алгебраической (комбинаторной) топологии [3].

Исходя с позиций теории графов [4], в роли основных показателей связности графа L могут выступать следующие параметры: плотность $\phi(L)$, хроматическое число $\gamma(L)$, число компонент $k(L)$, число Хадwigера $\eta(L)$ и др. Все они

являются неполными инвариантами графа, т.е. не определяют граф L с точностью до изоморфизма. Также в качестве характеристик связности могут выступать не отдельные числа, а их некоторая совокупность, представленная в виде вектора или кортежа - $\langle \phi, \gamma, \kappa, \eta \rangle$. Графовое описание структуры ТКС и связанные с ним модели связности, основанные на вычислении принятого к рассмотрению показателя связности, при свойственной им простоте и наглядности все же ограничиваются двумерным представлением. Подобное ограничение нередко приводит к трудностям проведения аналитического исследования, особенно если необходимо обеспечить учет структуры самих элементов системы телекоммуникаций. В этой связи актуальной представляется задача разработки адекватного математического представления структуры ТКС, представленного в виде соответствующей модели, на основании которой с системных позиций можно было бы сформулировать качественные и количественные показатели структурной сложности телекоммуникационной системы.

3. Симплициальное представление структуры ТКС

Для математического описания связности хорошо себя зарекомендовал математический аппарат q -анализа [3], базирующийся на использовании топологических идей и преломленный на решение задач структурного анализа телекоммуникационных систем [5]. Данный математический аппарат основывается на представлении каждого элемента ТКС в виде соответствующего геометрического объекта – симплекса, размерность которого определяется числом инцидентных ему связей. Симплициальный комплекс можно рассматривать как естественное математическое обобщение понятия графа, отражающее многомерную природу рассматриваемого бинарного отношения. Сама же система, состоящая из взаимосвязанных между собой элементов, представляет собой многомерный геометрический объект как набор взаимоувязанных симплексов, называемый симплициальным комплексом.

Топологическое представление ТКС с помощью симплициального комплекса позволило ввести понятие многомерной связности или q -связности ее элементов, например, коммутационных узлов, маршрутизаторов и т.д.

Определение: два симплекса σ_i и σ_j комплекса K_S q -связны, что эквивалентно, соединены цепью q -связи, если существует последовательность симплексов σ_{α_i} $\overset{n}{i=1}$ в K_S , такая, что $\sigma_{\alpha_i} \subset \sigma_i$, т.е. σ_{α_i} - грань симплекса σ_i , σ_{α_n} - грань симплекса σ_j , σ_{α_i} и $\sigma_{\alpha_{i+1}}$ обладают гранью размерности p для i , где $i = \overline{1, n-1}$ и $q = \min i; p_1, p_2, \dots, p_n, j$. Нижний индекс симплекса соответствует его геометрической размерности, т.е. $\dim \sigma_S = S$ [3].

Исходя из приведенного выше определения следует, что если два симплекса q -связны, то они также $q-1, q-2, \dots, 0$ связны в комплексе K . В свою очередь, q -связность порождает отношение эквивалентности на множестве K_S и для каждого значения размерности $q = 0, 1, \dots, S$ можно определить число раз-

личных классов эквивалентности. Операция выделения таких классов называется q -анализом.

В рамках q -анализа основной характеристикой связности является первый структурный вектор [3]

$$Q = Q_S, \dots, Q_q, \dots, Q_1, Q_0, \quad (1)$$

отражающий структуру комплекса K_S в целом. Компоненты первого структурного вектора фиксируют наличие Q_q q -несвязных между собой групп симплексов в комплексе, при этом связность симплексов внутри подобных групп определяется индексом q .

В качестве примера, графовой модели структуры телекоммуникационной системы (рис.1а) соответствует симплициальный комплекс K_2 (рис.1б). Причем, коммутационные узлы 1 и 4 представлены одномерными симплексами, соответственно, y_1 и y_4 с вершинами 2,3, коммутационный узел 2 – двумерным симплексом y_2 с вершинами 1,3,4, а коммутационный узел 3 – двумерным симплексом y_3 с вершинами 1,2,4. Первый структурный вектор комплекса K_2 имеет вид $Q_{K_2} = 2, 2, 1$.



Рис.1

Несмотря на то, что первый структурный вектор (1), получаемый в результате q -анализа системы, относится к количественным характеристикам связности, нельзя не отметить качественный характер учета в нем структур самих подсистем (симплексов), образующих систему (комплекс). С этой целью логично дополнить q -анализ дополнительной характеристикой связности – расширенным структурным вектором

$$D = d^S, \dots, d^q, \dots, d^1, d^0, \quad (2)$$

где $d^q = \langle l_1^q, l_2^q, \dots, l_j^q, \dots, l_{Q_q}^q \rangle$ – групповой структурный вектор, отражающий состав q -связных групп симплексов, размерности Q_q , а l_j – количество симплексов, входящих в состав j -ой группы симплексов. Из чего следует, что первый структурный вектор (1) определяет для расширенного структурного вектора (2)

его размерность, путем задания размерности его компонент. Для комплекса K_2 (рис.1 б) расширенный структурный вектор имеет вид $D = \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 4 \rangle$.

Исходя из самого понятия системы, подразумевающего обязательную взаимозависимость ее компонент (элементов), она должна быть связана на нулевом уровне, т.е. первый структурный вектор любой системы имеет $Q_0 = 1$.

Определив базовую модель связности ТКС с помощью аппарата q -анализа, путем алгебраическо-топологического описания системы в виде симплициального комплекса, возвратимся к задаче оценки ее структурной сложности. Так как базисным алгебраическим объектом полиэдральной динамики являются симплексы, определяемый на их основе показатель сложности должен явно учитывать размерности симплексов и характер взаимосвязи между ними.

Прежде чем дать математическое определение сложности системы, необходимо определить аксиоматику показателей сложности, т.е. перечислить те основные свойства, которыми должен обладать ее показатель ϕ . Для количественного определения показателя структурной сложности в соответствии с [3,6], а также вышеприведенными понятиями о сложности, будем использовать следующую версию аксиом сложности:

А.1. Сложность пустого множества тождественно равна нулю.

А.2. Сложность нульмерного комплекса равна 1.

А.3. Симплекс (группа симплексов) имеет сложность не большую, чем сложность комплекса.

А.4. Если система A – гомоморфный образ системы B , то $\phi(A) \leq \phi(B)$.

А.5. Если две системы изоморфны, то сложности соответствующих им комплексов равны.

А.6. Объединение двух комплексов образует новый комплекс, сложность которого не больше, чем сумма сложностей компонент.

4. Показатель структурной сложности

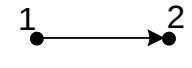
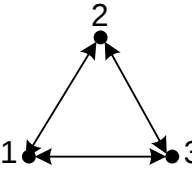
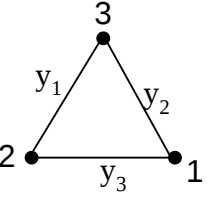
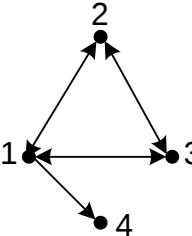
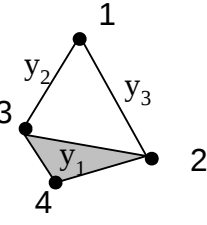
Из свойств 1-3 следует, что сложность любой системы характеризуется неотрицательным числом. Свойства 3 и 4 связаны с таким фундаментальным свойством, как монотонность: сложность не должна возрастать, если множество систем сокращается или они рассматриваются менее детально. Условие 5 очевидно: если переобозначить некоторые (произвольные) элементы заданной системы, то ее сложность изменится не должна. Свойство 6 – свойство аддитивности: если объединяются два множества систем, то суммарная сложность должна быть не больше суммы сложностей слагаемых.

Основываясь на выше приведенных аксиомах, введем следующий показатель сложности

$$\phi(K_S) = \sum_{i=0}^S \frac{\sum_{j=1}^{Q_i} l_j^i}{Q_i} \quad (3).$$

В таблице 1 приведены примеры моделей систем, представленных в виде графов и симплициальных комплексов, а также соответствующие им структурные векторы и величины показателей сложности.

Таблица 1

Графовое представление	Матрица смежности	Симплициальное представление	Структурные вектора	Показатель сложности
	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$		$Q(K_1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ $d^0 = \langle 1 \rangle$	$\phi(K_1) = 1$
	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$		$Q(K_2) = \begin{bmatrix} 3, 1 \end{bmatrix}$ $d^0 = \langle 3 \rangle$ $d^1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$	$\phi(K_2) = 4$
	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$		$Q(K_3) = \begin{bmatrix} 1, 3, 1 \end{bmatrix}$ $d^0 = \langle 4 \rangle$ $d^1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$ $d^2 = \langle 1 \rangle$	$\phi(K_3) = 6$

Например, симплициальный комплекс K_1 является нульмерным симплексом и его показатель сложности равен 1 (аксиома А.2). Система, представленная в виде комплекса K_3 , содержит в качестве подсистем графы 1 и 2, сложности которых $\phi(K_1)$, $\phi(K_2)$ не превышают сложности всей системы $\phi(K_3)$ (аксиома А.3), а $\phi(K_1) + \phi(K_2) \geq \phi(K_3)$ (аксиома А.6).

Оценивая в соответствии с введенным показателем (3) сложность простейших топологий «кольцо» и «звезда», имеющих место при построении локальных сетей связи, закономерно отметить, что она напрямую зависит от количества связей (дуг, ребер) в той или иной структуре. Топология «кольцо» с $n > 2$ линиями связи имеет структурный вектор

$$Q_K = \begin{bmatrix} n, 1 \end{bmatrix},$$

а соответствующий ей показатель структурной сложности равняется $n+1$, за исключением случая $n = 4$.

Структура «звезда» с n двунаправленными «лучами» описывается первым структурным вектором

$$Q_z = \begin{bmatrix} 1, 1, \dots, 1, \dots, 1 \end{bmatrix}$$

с n единичными координатами и имеет сложность $2n$.

5. Выводы

Таким образом, в работе предложен подход к оценке структурной сложности телекоммуникационных систем, исходя из качественного и количественного анализа связности элементов и подсистем ТКС. В качестве языка математического описания связности был использован аппарат q -анализа, дополненный такой важной характеристикой связности, как расширенный структурный вектор. Это, в свою очередь, позволило более полно и детально описать структуру как системы в целом, так и отдельных ее элементов. Задача определения q -связности, столь удачно формализуемая в рамках q -анализа, в случае использования графового представления структуры ТКС приведет к необходимости поиска q независимых путей между всеми парами вершин графа.

В соответствии с обоснованно принятыми аксиомами сложности на основе данных расширенного структурного вектора (2) сформулирован показатель структурной сложности (3).

Предложенный математический аппарат оценки структурной сложности, базирующийся на исследовании алгебраической связности, может найти свою должную реализацию при решении задач по сравнительному анализу различных структур ТКС, а также при получении систематической процедуры для декомпозиции системы в математически неприводимые подсистемы или объединение этих подсистем в единое целое. Кроме того, освещение аспекта динамической сложности систем тесно связано как со структурой отдельных элементов, так и со способом их организации, т.е. должно во многом основываться на структурной интерпретации системной сложности.

Литература

1. Мавродиев А.М. Системология. Методы и приложения к исследованию военных систем связи. – СПб.: ВАС, 1992. – 120 с.
2. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / В.Н. Волкова, В.А. Воронков, А.А. Денисов и др. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.
3. Кастри Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 216 с.
4. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
5. Поповский В.В., Лемешко А.В. Математическое моделирование связности телекоммуникационных систем с использованием симплициальных комплексов // Праці УНДІРТ. 2000. – №2 (22). – С.79-82.
6. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.